¿Cuántas personas caben en un campo de fútbol?

Fomentar el trabajo individual con problemas Fermi

¿Cuántas pelotas se necesitan para el campeonato mundial de fútbol?
Esto es imposible de contestar, o ¿existe una posibilidad de acercarse a una respuesta?
Aquí se presentan preguntas abiertas para desarrollar en forma creativa el modelamiento de los procesos de razonamiento con el tema del campeonato mundial.

"Prepare algo bonito para la reunión con los reporteros deportivos mañana en la tarde, café y bueno... ya sabe." Svenja, alumna del tercer año, sabe atender los pedidos de su jefe. No está consciente de que aquí también se trata mucho de matemáticas y de la habilidad de modelar. La dificultad no consiste tanto en la solución matemática misma, sino en representar matemáticamente la situación real (ver Heymann 1996, pág. 134).

Es preciso hacer cálculos: ¿Cuántos visitantes vendrán? No todos los invitados lo harán. ¿Quién toma café? ¿Quién toma algo diferente? Las tazas de café deben ser convertidas en peso (cantidad) de café. ¿Qué se ofrecerá de comer y en qué cantidades? Además, existe la necesidad de considerar un límite máximo y mínimo. De todas maneras debe haber suficiente, pero por otro lado ha de considerarse también el tema económico.

En problemas escolares bien definidos no se presentarían estas preguntas. Svenja sabría exactamente cuántos huéspedes fueron invitados y qué porcentaje se presentará efectivamente. Tendría claro que cada invitado tomará 2 tazas de café y comerá una porción de torta de frutas. El resultado calculado de esta forma, se puede comparar con el resultado "correcto" del solucionario.

Situaciones reales

Las situaciones claramente definidas requieren un procedimiento adecuado. Limitan la tarea de tal manera que es posible encontrar el camino correcto y la solución correcta, o no. A pesar de esto, este tipo de problemas son irreemplazables para aprender los procedimientos fundamentales.

Pero ¿debemos limitarnos a esto? ¿Es realmente necesario resolver tantos problemas de este tipo? Después del colegio, en la vida profesional y cotidiana los problemas o situaciones son
- menos estructurados,
- menos formales
- no están ordenados por su contenido bajo un determinado capítulo
- no están basados en datos precisos.

Pionero en este tipo de problemas de la vida real fue Enrico Fermi, quien con su pregunta "¿cuántos afinadores de piano existen en Chicago?" se distanció bastante de los problemas escolares clásicos, pero se acercó mucho más a la realidad. Por esto, ¡ya es tiempo de que introduzcamos una cultura de problemas Fermi! (Beerli 2003).

Es característico que los problemas no contengan indicaciones de números. Por esto incluyen habilidades que tradicionalmente no se consideran. De manera que hay que estimar magnitudes y evaluar sus efectos, así como relacionarlos con las consecuencias (ver Peter COP 1999, Herge 1999).

Problemas Fermi referentes al campeonato mundial de fútbol

El tema básico es el campeonato mundial de fútbol de 2006 en Alemania. Todas las preguntas tratan sobre este tema. Para que se puedan usar estos problemas también más adelante, es fácil variar los datos relativos en cualquier momento.

A primera vista el tema básico del fútbol parece dirigirse más bien a varones, pero, según la experiencia, a las niñas también les interesa trabajar este tema. Los diferentes conocimientos previos sobre el tamaño de un campo de fútbol, por ejemplo, no tienen un efecto negativo. Mientras que los niños muchas veces conocen de memoria las dimensiones, las niñas se acercan al valor por intermedio de tamaños referenciales como por ejemplo el largo de una pista de 75 m en la cancha deportiva.

Todos los problemas pueden ser tratados en diferentes niveles. Especialmente la entrada puede ser individualmente diferente, de manera que no sólo puede ser diferente dentro de un mismo salón sino que también puede ser adaptada para usarla en muchos niveles escolares: los casos 1 a 8 pueden ser trabajados a partir del 4º nivel de primaria, los casos 4 y 5, además, a partir del 3º o 4º año de secundaria.

Proceso de modelación

Es típico para el proceso de solución de estos problemas, un procedimiento de acuerdo con el esquema de modelación. Los pasos individuales de modelación figuran en forma general y luego en una solución concreta del caso 4.

Estructurar e imaginar

En este primer paso de modelación surge la siguiente pregunta:
¿Cuántas personas caben en un campo de fútbol?

Preguntas sobre el campeonato mundial de fútbol

- **Caso 1**
  Después del triunfo del equipo alemán en el partido final, todos los espectadores corren al campo de fútbol. ¿Cabría toda la gente en el campo si se acercan todos lo suficiente?

- **Caso 2**
  En el transcurso del partido cada jugador recorre un trayecto considerable. Piensa cómo podrías determinar el largo de este tramo y cómo lo calcularías.

- **Caso 3**
  Para el partido final en Berlín muchos espectadores vienen con su propio automóvil o en ómnibus. ¿Qué tamaño debe tener el estacionamiento para que todos puedan estacionarse cerca del estadio?

- **Caso 4**
  La mayoría de los espectadores vendrán al partido en tren. En el paradero “Estadio” que se construirá para el campeonato mundial, llegará cada 2 minutos un tren completamente lleno. Puesto que el paradero es subterráneo, se requiere de escaleras mecánicas que deben ser suficientemente rápidas para vaciar completamente los andenes antes de la llegada del próximo tren.
  Imagínate que tienes que planificar la construcción del paradero y que debes decidir sobre la cantidad necesaria de escaleras mecánicas.

- **Caso 5**
  Después de un partido queda un montón de basura en el estadio. ¿Cuántos contenedores de basura se llenarán en un solo partido internacional?

  - ¿Cómo puedo estructurar la situación compleja para que sea calculable?
  - ¿Qué información (mayormente datos) tengo a mi disposición? ¿Qué me falta conseguir? ¿Qué puedo conseguir?
  - ¿Qué esfuerzos son justificados para la exactitud exigida/ para la seguridad exigida?
  - ¿Qué idealizaciones (simplificaciones/ redondeos) realizo?

El propósito de este paso de modelación es obtener un modelo estructurado e idealizado.

En el caso 4 (planificar la cantidad de escaleras mecánicas) es preciso determinar, en primer lugar, qué cantidad de aficionados del fútbol llegan a la estación en el lapso de dos minutos. Después, hay dos enfoques diferentes de cómo estimar la capacidad de las escaleras mecánicas:
- mediante la consideración, ¿cuánta gente cabe al mismo tiempo en una escalera mecánica y cuánto tiempo necesita la misma para una vuelta?,
- mediante el acercamiento a la velocidad de la escalera mecánica con una magnitud de referencia, por ejemplo la comparación con un peatón caminando junto a la escalera.

El grupo escolar estima la situación real en forma concreta. Procede básicamente de acuerdo con el primer camino de solución:
- ¿Cuántos vagones tiene un tren subterráneo?
- ¿Cuántas personas caben en un vagón?
- ¿Cuántas personas caben simultáneamente en una escalera mecánica?
- ¿Cuánto tiempo necesita una escalera mecánica para una vuelta?

El grupo escolar examina estas suposiciones y acepta muchas idealizaciones: en todos los vagones hay la misma cantidad de personas, las personas ocupan en forma uniforme la escalera mecánica, todos los trenes subterráneos tienen la misma longitud.

Matematizar

Las preguntas en el segundo paso de modelación son:
- ¿Con qué medios matemáticos se puede tratar el problema (ahora estructurado e idealizado en la medida necesaria)?
- ¿Cómo se puede formalizar el caso / problema?

El objetivo es el procesamiento de los datos de tal manera que se puedan lograr procedimientos de cálculo.

En el caso 4, este paso consiste en relacionar las estimaciones existentes. Mediante una relación de personas-tiempo o mediante la velocidad de la escalera mecánica se permite el cálculo de la capacidad. El grupo escolar supone,
- que la escalera mecánica da cuatro vueltas en dos minutos,
- que se transportan 50 personas por vuelta, o sea 200 personas en dos minutos.

Calcular

El tercer paso es la solución calculada del caso formalizado, con el objetivo de lograr resultados matemáticos todavía no interpretados. Las suposiciones dadas son ahora enlazadas con las opciones matemáticas concretas. El grupo realiza el siguiente cálculo: divide la cantidad de personas en cada tren subterráneo por la cantidad de personas que una escalera mecánica puede transportar en dos minutos. Posteriormente es imposible explicar, qué es lo que les motivó exigir un total de seis escaleras mecánicas para 875 personas.

Interpretar y validar

En el cuarto paso de la modelación se formulan las siguientes preguntas:
- ¿Cuál de mis resultados resuelve el problema real?
- ¿Es posible aplicar el resultado a la situación real?
- ¿Tienen los resultados valor informativo en lo que se refiere a la seguridad y exactitud, o hay que ajustar más las suposiciones?
- ¿Tengo que cambiar mi proceso de modelación?

El grupo escolar calcula que se necesitarán seis escaleras mecánicas. Aparentemente no les satisface la interpretación de estos resultados. Cambian sus suposiciones y nuevamente pasan por todo el circuito de la modelación con las nuevas suposiciones, o sea de esta manera realizan una validación.

Una validación bien entendida trabaja con la “visión doble”. Los escolares no se fijan solamente en el resultado, sino que consideran también la solución del problema. Las magnitudes iniciales son modificadas hasta que la solución del problema (no sólo el resultado calculado) parece factible. De modo que con una mirada se fijan en el resultado y con la otra en el proceso para buscar la solución.

Autodiferenciación

Si no sólo se hace énfasis en el resultado de un caso, sino se enfoca cada vez más el proceso de solución, es necesario formular problemas que permitan conceptos de solución en diferentes niveles, es decir en forma ideal, que son autodiferenciales. Los problemas Fermi sí lo son, porque

- es posible enfocarlos desde diferentes niveles,
- es posible trabajarlos con medios más o menos complicados,
- logran con resultados distintamente satisfactorios (es decir, soluciones aplicables al problema según la situación).

Es posible reconocer diferentes niveles en la estructuración del proceso de solución. La motivación individual puede iniciarse en el proceso de pensamiento, y no debe tomar como punto inicial un resultado "correcto" o "incorrecto".

Partiendo del nivel real de rendimiento se lleva a cabo un cuidadoso acercamiento a un nivel más complejo: no existe la limitación para iniciar un caso, o sea el miedo de no encontrar la solución, ya que todos pueden lograr un resultado de acuerdo con su nivel, o experimentar "sin peligro" en un nivel superior. La valla "¿encuentro el camino a la solución?" elimina el aliento y la valentía en el caso de problemas muy definidos. En cambio, en los problemas Fermi: una vez logrado el primer intento, frecuentemente también viene la creatividad.

Autocorrección

Problemas abiertos cambian la visión de los errores. Las fallas adquieren otro valor, no forman barreras que impidan un avance, sino

- son desviaciones laterales del camino hacia la meta, que pueden ser "corregidas", pero no con el lapicero rojo del profesor sino por los escolares mismos;
- sustentan la "visión doble" en la relación entre una corrección en el proceso y los efectos en el resultado.

De hecho, no todos los grupos escolares logran encontrar inmediatamente un resultado satisfactorio.

Evaluar la utilidad de las soluciones encontradas con esfuerzo propio fomenta en forma muy natural; individualmente los límites son ampliados a una velocidad y en una dirección que corresponde al nivel actual de desarrollo.

Autores

Michael Marxer (1954), docente del Instituto Pedagógico de Schwäbisch Gmünd
Andreas Kittel (1988), colaborador científico del Instituto Pedagógico de Schwäbisch Gmünd

Bibliografía

Beerli, G.: matbu.ch: Realitätsbezug im Unterricht mit Fermifragen – In: Beiträge zum mathematikunterricht – Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2003, S. 89 -92

Herget, W.: ganz genau und ungefähr –mathematik lehren 93, Velber, 1999

Herget, W. / Jahnke, T./Kroll. W.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Berlin 2001

Heymann, H. W.: Allgemeinblidung und Mathematik – Beltz, Weinheim, Basel 1996

Leuders, T.: Qualität im Mathematikunterricht – Cornelsen, Berlin 2001

Maass, K.: Handytarife – In: ml 113, 2002 S. 53 ff.

Peter – Koop, A.: Das sind so ungefähr 30 0000 Schätzen und Überschlagsrechnen aus der Sache heraus – In: Die Grundschulzeitschrift 125, 1999, S. 12 – 15